TD : Calcul matriciel

En l'absence de précisions, la lettre $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

▶ Somme, produit de matrices

Exercice 13.1 Si vous découvrez le produit matriciel F

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AB, AC, BC, DA, CD et DC.

Exercice 13.2 Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, qui commutent, est encore nilpotente. PD

Exercice 13.3 Multiplication par une matrice élémentaire AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On rappelle que pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$, calculer $[AE_{i,j}]_{k,\ell}$ et $[E_{i,j}A]_{k,\ell}$.
   Comment décrivez-vous en termes simples les matrices $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$?
2. En déduire la matrice $E_{i,j}E_{k,\ell}$. *On pourra être amenés à distinguer plusieurs cas.*

Exercice 13.4 Matrices stochastiques PD

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite stochastique si :

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0$
- $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$

1. On note V le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à coefficients positifs est stochastique si et seulement si $AV = V$.
2. Montrer que si A et B sont deux matrices stochastiques, alors $\frac{1}{2}(A+B)$ et AB le sont aussi.

Exercice 13.5 AD

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ commute avec D si et seulement si elle est diagonale.
2. Déterminer $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ AM = MA\}$, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent à toutes les autres matrices (ensemble appelé *le centre de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).

Exercice 13.6 Nilpotence des matrices triangulaires strictes AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $k \geqslant 0$, on note $\mathcal{T}_k^+(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i+k > j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

1. Montrer que pour $k,\ell \geqslant 0$, si $A \in \mathcal{T}_k^+(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{T}_\ell^+(\mathbf{K})$, alors $AB \in \mathcal{T}_{k+\ell}^+(\mathbf{K})$.
2. En déduire qu'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure), à coefficients diagonaux nuls est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à n.

▶ Puissances de matrices

Exercice 13.7 Calculer les puissances des matrices suivantes : PD

1. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 13.8 Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients valent 1. PD

1. Calculer J^2. En déduire J^k, pour tout $k \in \mathbf{N}$.

2. En déduire $(J+\lambda I_n)^k$, pour $\lambda \in \mathbf{K}$ et $k \in \mathbf{N}$.
3. Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 13.9 Soit $A = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\theta \in]0, \pi[$. PD

1. Montrer que $A^2 = 2\cos(\theta)A - I$.
2. En déduire qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbf{N}, A^n = a_n A + b_n I$.
   Donner l'expression de a_{n+1} et de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Montrer que (a_n) est linéaire récurrente d'ordre 2, déterminer son terme général et en déduire l'expression de A^n.

▶ Trace, transposée

Exercice 13.10 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques. Montrer que AB est symétrique si et seulement si A et B commutent. F

Exercice 13.11 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$ si et seulement si $A = 0_n$. PD

Exercice 13.12 Montrer qu'il n'existe pas de couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ tel que $AB - BA = I_n$. PD

Exercice 13.13 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$. Montrer que A et B sont égales. AD

Exercice 13.14 Montrer par analyse-synthèse que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. AD

▶ Inverse d'une matrice carrée

Exercice 13.15 Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et le cas échéant, calculer leur inverse : PD

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 13.16 Inversibilité à l'aide d'un polynôme annulateur PD
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_p$, avec $\lambda_0\lambda_p \neq 0$ tels que $\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_p A^p = 0_n$.
Montrer que A est inversible, et exprimer son inverse en fonction des A^k, $0 \leqslant k \leqslant p-1$.

Exercice 13.17 Inverse d'une matrice diagonale par blocs AD
Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$, $C \in GL_p(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Montrer que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbf{K})$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 13.18 PD

1. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont deux matrices qui commutent, alors pour tout $p \in \mathbf{N}$, $A^p - B^p = (A-B)\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\right)$.
2. En déduire que si N est nilpotente, alors $I_n + N$ est inversible, et donner son inverse.

Exercice 13.19 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques. AD

1. Montrer que $\operatorname{tr}(A^2) \geqslant 0$.
2. En étudiant la fonction $\lambda \mapsto \operatorname{tr}\left((\lambda A + B)^2\right)$, prouver que $\operatorname{tr}(AB)^2 \leqslant \operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2)$.

Exercice 13.20 Oral Centrale 2014 D
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ deux matrices qui commutent, avec B nilpotente. Montrer que A est inversible si et seulement si $A+B$ est inversible.

Exercice 13.21 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverse D

1. $A = (\min(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$
2. $B = (F_{i+j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ où $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Exercice 13.22 Théorème d'Hadamard sur les matrices à diagonale dominante D

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $AX = 0_{n,1}$, et soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_i |x_i|$. Montrer que $x_{i_0} = 0$, et en déduire que A est inversible.